

Analyse complexe

L3 MAF

2015-2016

Chapitre 1

Fonctions holomorphes et fonctions analytiques.

Dans ce chapitre nous considérons des fonctions définies sur un ouvert U de \mathbb{C} à valeurs dans \mathbb{C} .

1.1 Rappel sur les nombres complexes

1.2 Fonctions holomorphes

1.2.1 Définition et propriétés

Définition 1.2.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ une partie ouverte du plan complexe et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe. On dit que f est holomorphe si f est \mathbb{C} -dérivable en tout point, c'est-à-dire si la limite

$$f'(z) = \lim_{h \in \mathbb{C}^*, h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existe en tout point $z \in \Omega$.

Notation 1.2.2. Conformément à l'usage courant, l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω sera noté $\mathcal{O}(\Omega)$. Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, la dérivée de f sera notée indifféremment

$$f'(z) = \frac{df}{dz}.$$

Comme l'existence d'une dérivée implique automatiquement la continuité, on a $\mathcal{O}(\Omega) \subset \mathcal{C}^0(\Omega)$, où $\mathcal{C}^0(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions continues $\Omega \rightarrow \mathbb{C}$.

Lemme 1.2.3. *Propriétés élémentaires—*

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$. Alors

$$(1.2.1) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \lambda f + \mu g \in \mathcal{O}(\Omega) \text{ et } (\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'.$$

$$(1.2.2) \quad fg \in \mathcal{O}(\Omega) \text{ et } (fg)' = f'g + fg'.$$

$$(1.2.3) \quad \frac{f}{g} \in \mathcal{O}(\Omega \setminus g^{-1}(0)) \text{ et } \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

(1.2.4) Si $f(\Omega)$ est contenu dans un ouvert Ω' et si $h \in \mathcal{O}(\Omega')$, alors $h \circ f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $(h \circ f)' = (h' \circ f) f'$.

(1.2.5) Si $f' = 0$, alors f est constante sur chaque composante connexe de Ω .

Démonstration. La démonstration de ces propriétés est presque entièrement analogue à celle des propriétés correspondantes pour les fonctions réelles d'une variable réelle, nous omettons donc les détails. En ce qui concerne (1.2.5), on peut supposer Ω connexe. Alors deux points quelconques de Ω peuvent être joints par un chemin polygonal tracé dans Ω , et il suffit donc de montrer que $f(a) = f(b)$ pour tout segment $[a, b] \subset \Omega$. Or ceci résulte du fait que la fonction de variable réelle $\varphi(t) = f(a + t(b - a))$ a une dérivée $\varphi'(t) = (b - a)f'(a + t(b - a))$ nulle pour tout $t \in [0, 1]$. \square

Il résulte en particulier des propriétés (1.2.2), (1.2.3) que l'ensemble des fonctions holomorphes $(\mathcal{O}(\Omega), +, \times, \cdot)$ a une structure de \mathbb{C} -algèbre pour les lois usuelles d'addition, de multiplication et de produit d'une fonction par un scalaire complexe.

Définition 1.2.4. Fonctions entières—

On appelle fonctions entières les fonctions qui sont holomorphes sur \mathbb{C} tout entier, c'est-à-dire les fonctions de $\mathcal{O}(\mathbb{C})$.

Exemple 1.2.5. Les fonctions polynômes $P(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n$ définissent des fonctions holomorphes sur \mathbb{C} tout entier.

Contre-exemples—

Il n'est pas très difficile de trouver des exemples de fonctions non holomorphes, on peut même en donner qui soient indéfiniment différentiables au sens réel. Ainsi la fonction $f(z) = \bar{z}$ n'admet nulle part de dérivée complexe, puisque la limite

$$\lim_{\mathbb{C}^* \ni h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{\mathbb{C}^* \ni h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h}$$

n'existe pas (si on pose $h = \rho e^{i\theta}$, alors $\bar{h}/h = e^{-i\theta}/e^{i\theta} = e^{-2i\theta}$ admet des limites différentes suivant chacune des demi-droites issues de l'origine). On vérifiera de même que la fonction $f(z) = |z|^2$ n'admet pas de dérivée complexe, sauf au point $z = 0$ en lequel la dérivée est nulle.

1.2.2 Rappels sur la notion de différentiabilité

Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Étant donné un ouvert Ω dans E , rappelons qu'une application $f : \Omega \rightarrow F$ est dite \mathbb{K} -différentiable en un point $x \in \Omega$ s'il existe une application \mathbb{K} -linéaire $\ell \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et une fonction ε définie sur un voisinage V de l'origine dans E , telles que pour h dans V on ait

$$(1.4.1) \quad f(x+h) = f(x) + \ell(h) + \|h\|\varepsilon(h),$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ ($\| \cdot \|$ désigne ici une norme quelconque sur E ; par ailleurs, l'adjectif différentiable utilisé seul fera toujours référence à la \mathbb{R} -différentiabilité, si le corps de base n'est pas précisé). L'application linéaire ℓ s'appelle *différentielle* de f au point x et elle est notée $\ell = df_x$. Rappelons par ailleurs les conventions de notations usuelles concernant les O et o , dites conventions de Landau : si $h \mapsto \eta(h)$ est une fonction arbitraire, on écrit

$$\begin{aligned} \eta(h) = O(\|h\|^p) &\iff \exists C > 0, \quad \|\eta(h)\| \leq C\|h\|^p, \\ \eta(h) = o(\|h\|^p) &\iff \exists \varepsilon, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0 \quad \text{et} \quad \|\eta(h)\| \leq \varepsilon(h) \|h\|^p. \end{aligned}$$

La formule (1.4.1) peut alors se récrire sous la forme

$$(1.4.2) \quad f(x+h) = f(x) + df_x(h) + o(\|h\|).$$

Si f est différentiable sur Ω , on note $df : \Omega \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$, $x \mapsto df_x$, l'application différentielle de f . Étant donné une base (e_1, \dots, e_n) de E et $h = \sum_{1 \leq j \leq n} h_j e_j \in E$, une application linéaire $\ell \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ s'exprime de manière unique sous la forme

$$(1.4.3) \quad \ell(h) = \sum_{1 \leq j \leq n} h_j v_j, \quad v_j \in F,$$

avec des vecteurs $v_j = \ell(e_j)$ quelconques. En particulier, la différentielle df s'écrit

$$(1.4.4) \quad df_x(h) = \sum_{1 \leq j \leq n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad \forall h = \sum h_j e_j,$$

où $\partial f / \partial x_j = df_x(e_j) \in F$ est la dérivée partielle de f dans la direction e_j . Si f est linéaire, il est clair que f admet une différentielle en tout point et que sa différentielle coïncide avec f . Les fonctions coordonnées x_j , vues comme des fonctions $E \rightarrow \mathbb{K}$, admettent elles-mêmes des différentielles dx_j telles que $dx_j(h) = h_j$. L'identité (1.4.3) devient alors

$$(1.4.5) \quad \ell = \sum_{1 \leq j \leq n} dx_j \cdot v_j = \sum_{1 \leq j \leq n} dx_j \cdot \ell(e_j)$$

et, en particulier, (dx_1, \dots, dx_n) est une base du \mathbb{K} -espace vectoriel $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, \mathbb{K})$. Ceci nous permet d'exprimer la différentielle df sous la forme plus familière

$$(1.4.6) \quad df = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j.$$

1.2.3 Caractérisation : Conditions de Cauchy Rieman

On note $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ où u correspond à la partie réelle de f et v à la partie imaginaire.

Théorème 1.2.6. *f est holomorphe si et seulement si $(x,y) \mapsto (u,v)$ est différentiable et*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{équations de Cauchy Rieman.}$$

1.3 Fonctions analytiques définition et rappels sur les séries entières

1.3.1 Définitions

Définition 1.3.1. Une *série entière* (complexe) est par définition une série de la forme $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ où les coefficients $a_n \in \mathbb{C}$ et la variable $z \in \mathbb{C}$ sont complexes.

Le *domaine de convergence* de la série entière est l'ensemble Δ des nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels la série converge.

Lorsque la série converge, nous désignons par

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

la valeur de la somme.

Définition 1.3.2. Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est *analytique* si en tout point $z_0 \in U$ il existe $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset U$ et f est développable en série entière sur $D(z_0, r)$. c'est-à-dire $f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge pour tout $z \in D(z_0, r)$.

Le principal résultat concernant le domaine de convergence est le suivant.

1.3.2 Rayon de convergence

Théorème 1.3.3. *héo*rème d'Hadamard—Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière complexe et soit $R \in [0, +\infty]$ défini par

$$(1.3.1) \quad R = \sup \{ r \geq 0 ; \text{la suite } (|a_n| r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \}$$

Alors le domaine de convergence Δ de la série vérifie

$$D(0, R) \subset \Delta \subset \overline{D}(0, R).$$

De plus, la série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout disque fermé borné $\overline{D}(0, r) \subset D(0, R)$. Le nombre R est appelé *rayon de convergence*. Il est donné par la formule de Hadamard

$$(1.3.2) \quad R = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{|a_n|}},$$

où la limite est calculée dans $[0, +\infty]$, avec la convention $1/0 = +\infty$.

Démonstration. Soit $E = \{ r \geq 0 ; (|a_n| r^n) \text{ est bornée} \}$ et $R = \sup E \in [0, +\infty]$. Alors, pour $|z| > R$, on a $|z| \notin E$, donc la suite $(|a_n| |z|^n)$ n'est pas bornée, et par suite la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ diverge. Ceci montre que $\Delta \subset \overline{D}(0, R)$.

Soit maintenant $r \geq 0$ un réel positif tel que $r < R = \sup E$. Il existe alors un réel $\rho \geq 0$ tel que $\rho \in E$ et $r < \rho < R$. Il existe donc une constante $C \geq 0$ telle que $|a_n| \rho^n \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $z \in \overline{D}(0, r)$ on en déduit

$$|a_n z^n| \leq |a_n| \rho^n \left(\frac{|z|}{\rho} \right)^n \leq C \left(\frac{r}{\rho} \right)^n$$

1.3. FONCTIONS ANALYTIQUES DÉFINITION ET RAPPELS SUR LES SÉRIES ENTIÈRES 7

avec $r/\rho < 1$. La série est majorée en module par une série géométrique convergente. Ceci montre que la série converge normalement sur le disque $\overline{D}(0, r)$ pour tout $r < R$, et en particulier $D(0, R) \subset \Delta$. Il ne reste plus qu'à démontrer la formule de Hadamard. C'est presque immédiat : si $r > \liminf 1/\sqrt[n]{|a_n|}$, il y a une infinité d'indices n tels que $1/\sqrt[n]{|a_n|} \leq r'$ pour un certain $r' \in]0, r[$, donc $|a_n|r'^n \geq 1$ et la sous-suite correspondante $|a_n|r^n \geq (r/r')^n$ n'est pas bornée, par conséquent $R \leq r$. Inversement, si $r < \liminf 1/\sqrt[n]{|a_n|}$, nous avons $1/\sqrt[n]{|a_n|} \geq r$ pour $n \geq n_0$ assez grand, donc la suite $|a_n|r^n$ est bornée (majorée par 1 pour $n \geq n_0$), et $R \geq r$. Ceci implique bien l'égalité $R = \liminf 1/\sqrt[n]{|a_n|}$. \square

Exemple 1.3.4. La série géométrique $\sum_{n \geq 0} z^n$ admet pour rayon de convergence $R = 1$ et pour domaine de convergence le disque ouvert $\Delta = D(0, 1)$. Les séries $\sum_{n \geq 1} n^{-n} z^n$ et $\sum_{n \geq 1} n^n z^n$ admettent respectivement pour rayon de convergence $R = +\infty$ et $R = 0$ (d'où $\Delta = \mathbb{C}$, $\Delta = \{0\}$ respectivement). La formule de Hadamard montre qu'on ne change pas le rayon de convergence en remplaçant a_n par $n^\alpha a_n$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ quelconque, puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1$. Ceci peut néanmoins affecter les points situés sur la frontière du domaine de convergence. Ainsi la série $\sum_{n \geq 1} n^{-2} z^n$ admet pour domaine de convergence $\Delta = \overline{D}(0, 1)$ (domaine sur lequel elle est normalement convergente), tandis que $\sum_{n \geq 1} n^{-1} z^n$ admet pour domaine de convergence $\Delta = \overline{D}(0, 1) \setminus \{1\}$. En $z = 1$, on obtient en effet la série harmonique $\sum 1/n$ qui est divergente. Pour $z = e^{i\theta}$ de module 1, $z \neq 1$, la série converge, comme on peut le voir à partir du classique lemme d'Abel.

Lemme 1.3.5. *Lemme d'Abel—Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n v_n$ une série à termes complexes. On suppose que $u_n \geq 0$ est une suite décroissante convergeant vers 0 et que les sommes partielles*

$$s_n = v_{n_0} + v_{n_0+1} + \cdots + v_n$$

sont bornées en module, i.e. $|s_n| \leq M$ pour tout $n \geq n_0$ et une certaine constante $M \geq 0$. Alors la série $\sum u_n v_n$ est convergente.

Démonstration. Pour tous les indices $q > p > n_0$, on peut en effet écrire

$$u_p v_p + \cdots + u_q v_q = u_p (s_p - s_{p-1}) + u_{p+1} (s_{p+1} - s_p) + \cdots + u_q (s_q - s_{q-1})$$

donc

$$u_p v_p + \cdots + u_q v_q = -u_p s_{p-1} + s_p (u_p - u_{p+1}) + \cdots + s_{q-1} (u_{q-1} - u_q) + u_q s_q. \quad (1.3.3)$$

Comme $|s_n| \leq M$, on déduit de là

$$|u_p v_p + \cdots + u_q v_q| \leq M u_p + M(u_p - u_{p+1}) + \cdots + M(u_{q-1} - u_q) + M u_q = 2M u_p$$

(on a utilisé ici la décroissance de (u_n) pour voir que $u_p - u_{p+1} \geq 0$). Comme $u_p \rightarrow 0$ quand $p \rightarrow +\infty$, ceci montre que les sommes partielles de la série $\sum u_n v_n$ satisfont le critère de Cauchy, et la convergence s'ensuit. \square

Dans l'exemple considéré plus haut, on a $n_0 = 1$, $u_n = 1/n$, $v_n = z^n = e^{ni\theta}$. Un calcul immédiat montre que la somme

$$v_1 + \cdots + v_n = e^{i\theta} \frac{e^{ni\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}$$

est majorée en module par $M = 2/|e^{i\theta} - 1|$ pour $e^{i\theta} \neq 1$, d'où la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} z^n/n$ pour $|z| = 1$, $z \neq 1$. \square

1.3.3 Sommes et produits de séries entières

Considérons deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, de rayons de convergence respectifs R' et R'' . Alors la série somme $\sum (a_n + b_n) z^n$ converge au moins dans l'intersection $D(0, R') \cap D(0, R'')$ des disques ouverts de convergence respectifs, par conséquent son rayon de convergence R^+ satisfait l'inégalité

$$(1.4.1) \quad R^+ \geq \min(R', R'').$$

L'inégalité peut être stricte. C'est le cas par exemple si nous choisissons $a_n = 2^{-n} + 1$, $b_n = -2^n$, $a_n + b_n = 1$, les rayons de convergence respectifs étant $R' = R'' = 1/2$, $R^+ = 1$. Il est clair néanmoins que l'égalité $R = \min(R', R'')$ a lieu si $R' \neq R''$, puisque la série somme diverge alors pour $|z| \in]R', R'']$, l'une des séries étant convergente et l'autre divergente.

Venons en maintenant à la série produit. On rappelle que le produit $\sum_{p \geq 0} u_p \sum_{q \geq 0} v_q$ des sommes de deux séries numériques absolument convergentes est égal à la somme $\sum_{n \geq 0} w_n$ de la série de terme général

$$(1.4.2) \quad w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{p=0}^n u_p v_{n-p},$$

qui est appelée *série produit* des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$. Pour le voir, on peut observer qu'on a une majoration

$$(1.4.3) \quad \left| \sum_{n=0}^{N'} w_n - \sum_{p=0}^N u_p \sum_{q=0}^N v_q \right| \leq \varrho_N^{(u)} \sum_{q=0}^{+\infty} |v_q| + \varrho_N^{(v)} \sum_{p=0}^{+\infty} |u_p|$$

où $\varrho_N^{(u)}$, $\varrho_N^{(v)}$ désignent respectivement les restes d'ordre N des séries $\sum |u_n|$ et $\sum |v_n|$, et où N' est un entier arbitraire tel que $N' \geq 2N$; en effet, le membre de gauche de (1.4.3) est la somme des termes $u_p v_q$ dont les indices sont tels que $p + q \leq N'$ et ($p > N$ ou $q > N$) ; les termes $u_p v_q$ tels que $p > N$ ont une somme inférieure ou égale en module à

$$\sum_{p=N+1}^{N'} |u_p| \sum_{q=0}^{N'} |v_q| \leq \varrho_N^{(u)} \sum_{q=0}^{+\infty} |v_q|,$$

et on a une majoration analogue pour les termes $u_p v_q$ tels que $q > N$. Si nous appliquons en particulier ce résultat au cas des séries entières $u_n = a_n z^n$ et $v_n = b_n z^n$, la formule (1.4.2) donne aussitôt $w_n = c_n z^n$ avec

$$c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{p=0}^n a_p b_{n-p},$$

et la série $\sum c_n z^n$ est appelée série entière produit (ou parfois produit de Cauchy) des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$. On sait que la série produit converge dans l'intersection $D(0, R') \cap D(0, R'')$, puisque chacun des facteurs y converge absolument en chaque point. Le rayon de convergence R^\times de la série produit satisfait donc encore l'inégalité

$$(1.4.4) \quad R^\times \geq \min(R', R'').$$

On peut avoir ici l'inégalité stricte, même si $R' \neq R''$. Il suffit de prendre par exemple

$$\sum_{n \geq 0} a_n z^n = 1 + \sum_{n \geq 1} 2^{n-1} z^n = \frac{1-z}{1-2z}, \quad \sum_{n \geq 0} b_n z^n = 1 - \sum_{n \geq 1} z^n = \frac{1-2z}{1-z},$$

dont la série produit $\sum c_n z^n$ se réduit au seul terme $c_0 = 1$, les rayons de convergence respectifs étant $R' = 1/2$, $R'' = 1$, $R^\times = +\infty$.

1.4 Propriétés fines

Théorème 1.4.1. *Les fonctions analytiques sont holomorphes.*

La démonstration de ce théorème découle du paragraphe suivant.

1.4.1 Théorème de dérivation terme à terme

Nous démontrons maintenant la propriété importante de dérivabilité terme à terme des séries entières.

Théorème. *Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors la dérivée complexe*

$$f'(z) = \lim_{h \in \mathbb{C}^*, h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existe en tout point du disque ouvert de convergence $D(0, R)$, et cette dérivée est donnée par la dérivée terme à terme de la série, c'est-à-dire

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Les dérivées successives s'expriment de même sous la forme

$$f^{(p)}(z) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1) \cdots (n-p+1) a_n z^{n-p},$$

et les séries obtenues ont un rayon de convergence égal au rayon de convergence R de la série initiale.

Démonstration. Le fait que les séries dérivées terme à terme admettent le même rayon de convergence R vient de ce que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n(n-1) \cdots (n-p+1)} = 1$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Maintenant, la formule du binôme donne

$$(z+h)^n = z^n + nhz^{n-1} + \sum_{p=2}^n C_n^p h^p z^{n-p}$$

avec $C_n^p = \frac{n(n-1)}{p(p-1)} C_{n-2}^{p-2} \leq n(n-1) C_{n-2}^{p-2}$, d'où

$$\left| \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - nz^{n-1} \right| \leq n(n-1)|h| \sum_{p=2}^n C_{n-2}^{p-2} |h|^{p-2} |z|^{n-p} = n(n-1)|h|(|z| + |h|)^{n-2}.$$

Supposons $z \in D(0, R)$ et $z+h \in D(0, R)$. En multipliant la différence ci-dessus par a_n et en sommant sur n , notre inégalité implique

$$(1.5.1) \quad \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \sum_{n \geq 1} na_n z^{n-1} \right| \leq |h| \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)|a_n|(|z| + |h|)^{n-2}.$$

Si nous prenons $|h| \leq \delta < R - |z|$, alors $|z| + |h| \leq |z| + \delta < R$ et par suite

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)|a_n|(|z| + |h|)^{n-2} \leq M := \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)|a_n|(|z| + \delta)^{n-2} < +\infty.$$

Ceci montre que

$$\lim_{h \in \mathbb{C}^*, h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \sum_{n \geq 1} na_n z^{n-1}$$

pour tout $z \in D(0, R)$, et le théorème s'ensuit. \square

Inversement, étant donné une série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$, il est clair que f admet sur $D(0, R)$ une primitive complexe

$$(1.3.2) \quad F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} z^n,$$

telle que $F'(z) = f(z)$ au sens complexe. De plus la série entière de F admet encore R comme rayon de convergence, et les autres primitives sont données par $F + C$ où $C \in \mathbb{C}$ est une constante arbitraire (une fonction G sur $D(0, R)$ admettant une dérivée complexe G' nulle est nécessairement égale à la constante $G(0)$, comme on le voit en regardant les fonctions de variables réelles $u(t) = G(tz)$, $t \in [0, 1]$, dont les dérivées réelles $u'(t)$ sont nulles; on verra plus loin en (2.1.5) un énoncé plus général).

1.4.2 Continuité à la frontière

Il est souvent utile de connaître le comportement de la somme en un point z_0 de la frontière du disque de convergence où la série entière converge. La situation peut être très compliquée (au sens où la somme $f(z)$ n'est pas nécessairement continue en z_0 ni même bornée dans un voisinage). On a cependant le résultat de continuité partielle suivant.

Théorème. *Soit $f(z) = \sum_{n \geq n_0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ fini, et $z_0 \in \Gamma(0, R)$ un point du cercle de convergence en lequel la série converge. Alors, si $S = S_{z_0, \delta, \eta} \subset D(0, R) \cup \{z_0\}$ est un secteur circulaire fermé de sommet z_0 , non tangentiel, de la forme*

$$S_{z_0, \delta, \eta} = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| \leq \delta, |\text{angle}(z_0 - z, z_0)| \leq \pi/2 - \eta\},$$

on a $\lim_{z \in S, z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Autrement dit, la propriété de continuité attendue a bien lieu pourvu qu'on ne s'approche pas tangentiellement de la frontière.

Démonstration. De manière assez analogue à ce que nous avons fait pour la transformation d'Abel (1.1.3), posons $u_n = (z/z_0)^n$, $v_n = a_n z_0^n$ et $\varrho_n = \sum_{p > n} v_p$. Pour $q > p > n_0$ nous obtenons

$$\sum_{n=p}^q a_n z^n = u_p v_p + \cdots + u_q v_q = u_p(\varrho_{p-1} - \varrho_p) + u_{p+1}(\varrho_p - \varrho_{p+1}) + \cdots + u_q(\varrho_{q-1} - \varrho_q) = u_p \varrho_{p-1} + \varrho_p(u_p - u_{p+1}) + \cdots + \varrho_{q-1}(u_{q-1} - u_q) + \varrho_q u_q$$

Étant donné $\varepsilon > 0$, la convergence de la série $\sum_{n \geq n_0} a_n z_0^n$ assure l'existence d'un entier N_ε tel que $|\varrho_n| \leq \varepsilon$ pour $n \geq N_\varepsilon$. Pour $p, q > N_\varepsilon$, nous avons alors

$$\left| \sum_{n=p}^q a_n z^n \right| \leq \varepsilon \left(2 + \left| \frac{z}{z_0} - 1 \right| \sum_{n=p}^{q-1} \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \right) \leq \varepsilon \left(2 + \frac{|z - z_0|}{|z_0| - |z|} \right)$$

puisque

$$\sum_{n=p}^{q-1} \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{z}{z_0} \right|^n = \frac{1}{1 - |z|/|z_0|} = \frac{|z_0|}{|z_0| - |z|}.$$

L'hypothèse $z \in S_{z_0, \delta, \eta}$ assure précisément que le quotient $|z - z_0|/(|z_0| - |z|)$ reste borné par une constante indépendante de z ; en effet la condition angulaire $|\text{angle}(z_0 - z, z_0)| \leq \pi/2 - \eta$ équivaut à $\text{Re}(z_0 - z)\bar{z}_0 \geq |z - z_0| |z_0| \sin \eta$, d'où successivement

$$|z - z_0|^2 = |z|^2 - |z_0|^2 + 2 \text{Re}(z_0 - z)\bar{z}_0 \geq |z|^2 - |z_0|^2 + 2 |z_0| |z - z_0| \sin \eta, (2 |z_0| \sin \eta - |z - z_0|) |z - z_0| \leq |z|^2 - |z_0|^2$$

ce qui implique, pour $|z - z_0| \leq \delta' := \sin \eta |z_0|$, l'inégalité

$$\frac{|z - z_0|}{|z_0| - |z|} \leq \frac{2}{\sin \eta}.$$

On en déduit que la série $\sum a_n z^n$ satisfait le critère de Cauchy uniforme sur $S_{z_0, \delta, \eta}$. Ceci entraîne la convergence uniforme de la série et la continuité de f sur $S_{z_0, \delta, \eta}$. \square

1.5 Fonctions analytiques particulières

1.5.1 Fonction exponentielle

Définition de la fonction exponentielle complexe de rayon de convergence infini, de dérivée \exp . Formule $\exp(u + v) = \exp(u) \exp(v)$. Définition de $\cosh z, \sinh z; \cos z, \sin z$.

1.5.2 Fonction Logarithme

On donne une détermination du logarithme (fonction réciproque de \exp) dans $\Omega_t = \mathbb{C} \setminus (e^{it}R_-)$ par $\text{Log}_t(z) = \ln|z| + i \arg_t(z)$ où \arg_t est la détermination de l'argument comprise dans $]t - \pi, t + \pi[$. La détermination est dite principale si $t = 0$ et noté Log . La fonction Log est holomorphe et de dérivée $1/z$.

Fonction puissance

On définit z^a par $\exp(a \text{Log}_t z)$ dans Ω_t .

1.5.3 Autres exemples

Ainsi les fonctions $\exp, \cos, \sin, \text{ch}, \text{sh}$ définissent des fonctions holomorphes sur \mathbb{C} tout entier (i.e. des fonctions entières). On a par ailleurs

$$\begin{aligned} \text{tg} &= \frac{\sin}{\cos} \in \mathcal{O}(\mathbb{C}(\pi/2 + \pi\mathbb{Z})), & \cotg &= \frac{\cos}{\sin} \in \mathcal{O}(\mathbb{C}\pi\mathbb{Z}), \\ \text{th} &= \frac{\text{sh}}{\text{ch}} \in \mathcal{O}(\mathbb{C}(i\pi/2 + i\pi\mathbb{Z})), & \coth &= \frac{\text{ch}}{\text{sh}} \in \mathcal{O}(\mathbb{C}i\pi\mathbb{Z}), \end{aligned}$$

et de même les déterminations \log_{θ_0} et $z \mapsto z^a$ du logarithme et des fonctions puissances sont holomorphes sur Ω_{θ_0} .

1.6 Théorèmes de prolongement analytique et zéros isolés

1.6.1 Prolongement analytique :

Théorème 1.6.1. *Soit U un ouvert connexe, f une fonction analytique de U dans \mathbb{C} , $z_0 \in U$. On a équivalence entre :*

- f est nulle sur $D(z_0,)$
- $f^{(n)}(z_0) = 0$ pour tout $n \geq 0$
- $f = 0$ sur U .

Corollaire 1.6.2. *Soit U un ouvert connexe de \mathbb{C} , f, g des fonctions analytiques de U dans \mathbb{C} et D un ouvert non vide tel que, $f(z) = g(z)$ pour tout $z \in D$. Alors $f = g$ sur U .*

1.6.2 Zéros

Définition 1.6.3. On appelle zéro de f tout point z_0 tel que $f(z_0) = 0$.

Proposition 1.6.4. Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction analytique non nulle sur un ouvert U . Soit z_0 un zéro de f . Alors, $\nu = \inf\{n \mid f^{(n)}(z_0) \neq 0\} \geq 1$ et

$$f(z) = (z - z_0)^\nu g(z) \quad \text{où } g \text{ est une fonction analytique sur un voisinage de } z_0 \text{ et } g(z_0) \neq 0$$

Théorème 1.6.5. Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction analytique non nulle sur un ouvert U . Alors l'ensemble

$$\mathcal{Z}_U(f) = \{z \in U \mid f(z) = 0\}$$

est un ensemble fermé et discret dans U .

Corollaire 1.6.6. Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction analytique sur un ouvert U CONNEXE. Soit $E \subset \mathcal{Z}_U(f)$ un ensemble possédant un point d'accumulation dans U . Alors, $f = 0$ sur U .

1.7 Étude locale et application ouverte

Théorème 1.7.1. Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction analytique non constante sur un ouvert U . Soit $z_0 \in U$. Alors, il existe V, W voisinage de z_0 resp. de 0, et $\phi : V \rightarrow W$ analytique qui de plus est un biholomorphe (homéomorphisme holomorphe de réciproque holomorphe), tels que

$$f(z) - f(z_0) = (\phi(z))^m.$$

Ainsi, dans un voisinage de $f(z_0)$ (par exemple le disque de centre $f(z_0)$ et de rayon $r > 0$ tel que $D(f(z_0), r) \subset W$) tout point $w \neq 0$ a exactement m antécédents dans un voisinage de z_0 inclus dans U . En effet on résout l'équation $w - f(z_0) = (\phi(z))^m$ avec ϕ bijective.

Théorème 1.7.2. Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction analytique **non constante** sur un ouvert $U \subset \mathbf{C}$. Alors, l'application f est ouverte : pour tout ouvert $O \subset U$ son image $f(O)$ est un ouvert de \mathbf{C} .

Démonstration: Soit O un ouvert inclus dans U . On veut montrer que son image est un ouvert. On applique le théorème précédent à la restriction $f : O \rightarrow \mathbf{C}$. On obtient pour tout point $a \in O$ un voisinage V_a de a , un voisinage W_a de $f(a)$ et un homéomorphisme $\phi_a : V_a \rightarrow W_a$ tels que $f(z) - f(a) = (\phi_a(z))^{m_a}$ où m_a est la multiplicité de a dans la fonction $f(z) - f(a)$. Comme W_a est un voisinage de 0, il existe un rayon $r_a > 0$ tel que $D(0, r_a) \subset W_a$. Alors sa préimage $\Omega_a = \phi_a^{-1}(D(0, r_a))$ est incluse dans V_a et contient a . Nous obtenons ainsi,

$$a \in \Omega_a \subset V_a \subset O, \quad f(\Omega_a) = D(f(a), r_a^{m_a}).$$

On peut décomposer O de la façon suivante :

$$O = \bigcup_{a \in O} \Omega_a, \quad f(O) = \bigcup_{a \in O} f(\Omega_a) = \bigcup_{a \in O} D(f(a), r_a^{m_a}).$$

Par suite O est une réunion d'ouverts, c'est un ouvert. □

1.8 Principe du maximum et Lemme de Schwarz

Théorème 1.8.1. *Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction analytique sur un ouvert $U \subset \mathbf{C}$.*

1. *S'il existe un point $z_0 \in U$ tel que*

$$|f(z_0)| = \sup_{z \in U} |f(z)|$$

alors f est constante sur la composante connexe de U contenant z_0 .

2. *Pour tout K compact, $K \subset \Omega$, on a*

$$\max_{z \in K} |f(z)| = \max_{z \in \partial K} |f(z)|$$

3. *Les deux résultats précédents sont valables avec $\operatorname{Re}(f)$ ou $\operatorname{Im}(f)$ au lieu de $|f|$.*

Démonstration: Soit U_0 la composante connexe de U contenant z_0 . Si $f|_{U_0}$ n'est pas constante, $f(U_0)$ est un ouvert contenant $f(z_0)$ (théorème précédent). Il existe alors $r > 0$ tel que $D(f(z_0), r) \subset f(U_0)$. Ce disque contient des points de module supérieur à $|f(z_0)|$. L'application est donc constante sur la composante connexe U_0 .

Théorème 1.8.2. *Soit $f : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$ une fonction analytique telle que $f(0) = 0$ alors*

- *Pour tout $z \in D(0, 1)$ on a $|f(z)| \leq |z|$*
- *S'il existe un point $\zeta \neq 0$ tel que $|f(\zeta)| = |\zeta|$ alors*

$$\forall z \in D(0, 1), \quad f(z) = e^{i\theta} z \quad \text{avec } \theta \in \mathbf{R}$$

Démonstration: Comme $f(0) = 0$ d'après l'écriture local au voisinage de 0, on a $f(z) = zg(z)$ avec g analytique sur un voisinage de 0. Ainsi, par le théorème de prolongement analytique $h(z) = g(z)$ au voisinage de 0 et $h(z) = f(z)/z$ ailleurs est une fonction analytique $h : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$. On lui applique le principe du maximum sur le disque $D(0, r)$ avec $0 < r < 1$. Soit $z \in D(0, 1)$ fixé, il existe $0 < r < 1$ tel que $z \in D(0, r)$ et $|f(z)| \leq 1/r'$ pour tout $r < r' < 1$. Par passage à la limite on obtient le résultat. \square

Chapitre 2

Intégrales le long d'un chemin, formule de Cauchy, analyticité des fonctions holomorphes

2.1 Intégrales le long d'un chemin, indice d'un lacet

2.1.1 Chemins

Définition 2.1.1. On appelle courbe dans \mathbf{C} une application continue $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ avec $a < b$ deux réels et $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$ avec $\gamma_1(t) \in \mathbf{R}$ et $\gamma_2(t) \in \mathbf{R}$.

$[a, b]$ est l'intervalle de paramétrage de γ .

On note γ^* l'image $\gamma([a, b])$.

γ^* est une courbe fermée (ou lacet) si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Définition 2.1.2. On appelle chemin dans \mathbf{C} une application de classe \mathcal{C}^1 par morceaux $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$. C'est-à-dire qu'il existe une partition $t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b$ telle que $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ soit de classe \mathcal{C}^1 .

Définition 2.1.3. Deux chemins $\gamma : I \rightarrow \mathbf{C}$ et $\delta : J \rightarrow \mathbf{C}$ sont équivalents s'il existe une bijection croissante $\phi : I \rightarrow J$ de classe \mathcal{C}^1 ainsi que ϕ^{-1} telle que $\gamma = \delta \circ \phi$.

Remarque 2.1.4. Si deux chemins $\gamma : I \rightarrow \mathbf{C}$ et $\delta : J \rightarrow \mathbf{C}$ sont équivalents alors $\gamma^* = \delta^*$.

On pourra donc supposer que l'intervalle de paramétrage est $[0, 1]$ en prenant un chemin équivalent.

- Chemin opposé : $\gamma_-(t) = \gamma(1 - t)$
- Juxtaposition de deux chemins γ_1 et γ_2 :

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \gamma_2(2t - 1) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

- Longueur d'un chemin :

$$Long(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

Exercice 2.1.5. Montrer que la longueur de deux chemins équivalents est la même.

2.1.2 Intégrale

Définition 2.1.6. Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ est un chemin et f une fonction continue sur γ^* , alors on pose :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

Exercice 2.1.7. Montrer que si γ et δ sont des chemins équivalents alors l'intégrale est la même.

Proposition 2.1.8. Soit F une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur U ouvert de \mathbf{C} et γ un chemin dans U alors

$$\int_{\gamma} F'(z) dz = F(b) - F(a) \text{ où } \gamma(0) = a, \gamma(1) = b.$$

2.2 Indice d'un lacet

Soit γ un lacet et $a \notin \gamma^*$. On définit

$$Ind(\gamma, a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - a}.$$

Théorème 2.2.1. L'application $z \mapsto Ind(\gamma, z)$ est à valeurs dans \mathbf{Z} . Elle est constante sur les composantes connexes de $\mathbf{C} \setminus \gamma^*$ et nulle sur la composante connexe non bornée.

2.3 Théorème de Cauchy

Théorème 2.3.1. Soit Δ un triangle (enveloppe convexe de trois points) inclus dans U ouvert de \mathbf{C} et $p \in U$, f une fonction continue sur U et holomorphe sur $U \setminus \{p\}$. Alors,

$$\int_{\Delta} f(z) dz = 0.$$

Corollaire 2.3.2. Soit U un ouvert étoilé, $p \in U$ et $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ continue sur U et holomorphe sur $U \setminus \{p\}$. Alors, f admet une primitive holomorphe sur U .

Théorème 2.3.3. Formule de Cauchy Soit U un ouvert étoilé et $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe sur U . Alors, pour tout lacet γ dans U ,

$$f(z) Ind(\gamma, z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{pour } z \in U \setminus \gamma^*.$$

2.4 Analycité

Théorème 2.4.1. *Soit U un ouvert de \mathbf{C} et $f : U \rightarrow \mathbf{C}$. On a l'équivalence :
 f est holomorphe sur U si et seulement si f est analytique sur U .*

Corollaire 2.4.2. *Soit U un ouvert, $p \in U$ et $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. Alors,*

- f admet un DSE sur $D(p, R)$ avec $R \geq d(p, \partial U)$.
- f est indéfiniment dérivable et

$$f^{(n)}(p) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{C(p,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - p)^{n+1}} d\zeta$$

Théorème 2.4.3. [Morera]

Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue telle que pour tout triangle Δ inclus dans U

$$\int_{\Delta} f(z) dz = 0.$$

Alors, f est une fonction holomorphe sur U .

Corollaire 2.4.4. *Soit U un ouvert, $p \in U$ et $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue, holomorphe sur $U \setminus \{p\}$. Alors, f est holomorphe sur U .*

2.5 Conséquences

Corollaire 2.5.1. [Inégalité de Cauchy]

Soit U un ouvert et $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. Soit $p \in U$ et $r > 0$ tel que $\overline{D(p, r)} \subset U$ alors

$$\forall n \geq 0, \quad |f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{z \in \overline{D(p, r)}} |f(z)|$$

.

Définition 2.5.2. Une fonction holomorphe sur tout \mathbf{C} est appelée fonction entière.

Corollaire 2.5.3. *Toute fonction entière bornée est constante.*

Corollaire 2.5.4. [Théorème de D'Alembert Gauss] *Tout polynôme de degré $d \geq 1$ admet au moins une racine dans \mathbf{C} .*

Corollaire 2.5.5. *Soit U un ouvert connexe par arcs et $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue telle que pour tout lacet δ inclus dans U*

$$\int_{\delta} f(z) dz = 0.$$

Alors, f admet une primitive holomorphe sur U et en particulier f est une fonction holomorphe sur U .

Chapitre 3

Homotopie

Définition 3.0.6. Soit U un ouvert de \mathbf{C} . Soient γ_0, γ_1 deux chemins de U , de même extrémités $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = x$ et $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = y$. Ils sont dits *homotopes* dans U à extrémités fixées s'il existe une application continue

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$$

continue telle que $H(0, t) = \gamma_0(t)$, $H(1, t) = \gamma_1(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$ et $H(s, 0) = x$, $H(s, 1) = y$ pour tout $s \in [0, 1]$.

Définition 3.0.7. Soit U un ouvert de \mathbf{C} . Soient γ_0, γ_1 des lacets de U . Ils sont dits *homotopes* dans U s'il existe une application continue

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$$

continue telle que $H(0, t) = \gamma_0(t)$ et $H(1, t) = \gamma_1(t)$

Théorème 3.0.8. Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une application holomorphe. Soient γ_0, γ_1 deux chemins de U , homotopes dans U à extrémités fixées. Alors,

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

Corollaire 3.0.9. Soit U un ouvert de \mathbf{C} . Soient γ_0, γ_1 deux lacets dans U homotopes. Alors,

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

Chapitre 4

Singularités, Théorème des résidus

4.1 Singularités isolées

Soit U un ouvert de \mathbf{C} et $p \in U$ et $f : U \rightarrow \mathbf{C}$. Le point p est une singularité isolée de f s'il existe $r > 0$ tel que $f : D(p, r) \setminus \{p\} \rightarrow \mathbf{C}$ est holomorphe.

Théorème 4.1.1. [prolongement de Riemann] Soit $f : D(p, r) \setminus \{p\} \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe et bornée. Alors, f se prolonge continuellement en p et par conséquent f est holomorphe sur $D(p, r)$.

Définition 4.1.2. Une telle singularité est appelé effaçable ou inexistante.

Définition 4.1.3. Une singularité isolée p est appelée un *pôle* si elle n'est pas effaçable et s'il existe $n > 0$ tel que $(z - p)^n f(z)$ a une limite finie en p . Le plus petit $n > 0$ vérifiant cela s'appelle la multiplicité du pôle.

Corollaire 4.1.4. p est un pôle d'ordre $n \iff (z - p)^n f(z)$ a une limite finie non nulle en p

Théorème 4.1.5. Soit $f : D(p, r) \setminus \{p\} \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. p est un pôle de $f \iff f$ tend vers l'infini en p .

Définition 4.1.6. On appelle singularité *essentielle* de f , une singularité qui n'est ni un pôle ni effaçable.

Exemple: $f(z) = e^{1/z}$.

Théorème 4.1.7. [Cosatori - Weierstrass] p est une singularité essentielle \iff pour tout $r > 0$ l'image $f(D(p, r) \setminus \{p\})$ est dense dans $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$.

Définition 4.1.8. On appelle fonction *méromorphe* sur U une fonction holomorphe sur $f : U \setminus S$, où S est un ensemble fermé discret de U dont tous les points sont des singularités de type pôle.

4.2 Développement en série de Laurent

Définition 4.2.1. Une série de Laurent est une expression de la forme

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$$

Définition 4.2.2. On appelle partie singulière, resp. régulière d'une série de Laurent

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n \text{ l'expression } \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n, \text{ resp. } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Définition 4.2.3. Une série de Laurent est dite convergente si les deux parties singulières et régulières convergent. Si la partie singulière est non nulle, le domaine de convergence est un anneau qui est l'intersection d'un disque de convergence et d'un complémentaire de disque.

Lemme 4.2.4. Soit une série de Laurent de la forme $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$, de partie singulière

non nulle. On note $1/R_1$ le rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} z^n$ et R_2 le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Alors, pour $|\frac{1}{z}| < R_1$ la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} n (1/z)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n n z^n$ converge. Ainsi, pour $R_1 < |z| < R_2$ la série de Laurent converge.

Théorème 4.2.5. Soit $A = \{z \mid R_1 < |z| < R_2\}$ et $f : A \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe. Alors f est développable en série de Laurent dans A de coefficients

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta$$

avec $R_1 < R < R_2$.

Corollaire 4.2.6. Au voisinage d'une singularité isolée p , f est développable en série de Laurent

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-p)^n \text{ avec } a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(p,R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \text{ pour } R \text{ petit.}$$

Définition 4.2.7. On appelle *résidu* de f en une singularité isolée p de f le coefficient a_{-1} du développement en série de Laurent.

$$\text{Res}(f, p) = a_{-1} = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(p,r)} f(\zeta) d\zeta$$

pour $r > 0$ petit.

4.3 Théorème des résidus

Théorème 4.3.1. Soit U un ouvert de \mathbf{C} , $S = \{z_1, \dots, z_n\} \subset U$ et $f : U \setminus S \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. Pour tout lacet $\gamma \subset U \setminus S$ homotope à un point dans U ,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k) \text{Ind}(\gamma, z_k)$$

4.3.1 Calculs de résidus

Si a est un pôle simple de f alors $\text{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z)$.

Si a est un pôle d'ordre n de f alors $\text{Res}(f, a) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} ((z - a)^n f(z))$.

Exemple : Soit $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ avec $Q(a) = 0 \neq Q'(a)$. Alors $\text{Res}(f, a) = \frac{P(a)}{Q'(a)}$.

Définition 4.3.2. Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction méromorphe. On pose

- $\omega(f, a) = n$ si a est un zéro d'ordre n et
- $\omega(f, a) = -n$ si a est un pôle d'ordre n .

Lemme 4.3.3. Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction méromorphe. Alors $\text{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) = \omega(f, a)$.

Corollaire 4.3.4. Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction méromorphe. On note par F l'ensemble des pôles et zéros de f . Pour tout lacet $\gamma \subset U \setminus F$ homotope à un point dans U , on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f'}{f}(z) dz = \sum_{a \in F} \omega(f, a) \text{Ind}(\gamma, a)$$

4.3.2 Théorème de Rouché

Théorème 4.3.5. Soient f, g deux fonctions méromorphes sur U . Soit $\gamma \subset U$ un lacet tel que $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ pour tout $z \in \gamma^*$. Alors

$$\sum_{a \in F_f} \omega(f, a) \text{Ind}(\gamma, a) = \sum_{a \in F_g} \omega(g, a) \text{Ind}(\gamma, a).$$

En particulier, si γ est un lacet simple, dans la composante connexe bornée de $\mathbf{C} \setminus \Gamma^*$ on a le nombre de zéros de f moins le nombre de pôles de f qui est égal au nombre de zéros de g moins le nombre de pôles de g .

Exemple : Soit $f(z) = z^4 + 5z^4 + z - 2$ et $g(z) = 5z^4$. Alors $|f(z) - g(z)| \leq 4$ pour $|z| = 1$. Donc pour $\gamma = \{z \mid |z| = 1\}$ on a $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ pour tout $z \in \gamma^*$ et donc f a 4 zéros dans le disque unité.

Chapitre 5

Fonctions holomorphes définies par des suites, intégrales ou produits infinis

5.1 Suites de fonctions holomorphes

Théorème 5.1.1. (de convergence de Weierstrass)

Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes définies sur un ouvert Ω . On suppose que la suite converge uniformément sur les compacts de Ω vers une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Alors, f est holomorphe et la suite (f'_n) converge uniformément sur les compacts de Ω vers f' .

Corollaire 5.1.2. *Soit $\sum g_n$ une série de fonctions holomorphes définies sur un ouvert Ω . On suppose que la série converge uniformément sur les compacts de Ω vers une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Alors, f est holomorphe et la série $\sum g'_n$ converge uniformément sur les compacts de Ω vers f' .*

Proposition 5.1.3. *Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes définies sur un ouvert Ω qui converge uniformément sur les compacts vers une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Si f est non constante et s'il existe z_0 tel que $f(z_0) = 0$, alors pour tout $r > 0$, il existe $N_r > 0$ tel que pour tout $n > N_r$ la fonction f_n s'annule dans le disque $D_r(z_0) = \{z \mid |z - z_0| > r\}$.*

Corollaire 5.1.4. (Théorème de Hurwitz)

*Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes **injectives** définies sur un ouvert Ω qui converge uniformément sur les compacts vers une fonction $f : \omega \rightarrow \mathbb{C}$. Alors, f est constante ou injective.*

5.2 Intégrales de fonctions holomorphes

Soit T un espace topologique compact muni d'une mesure positive μ et Ω un ouvert de \mathbb{C} . Soit $F : \Omega \times T \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue $(z, t) \mapsto F(z, t)$ vérifiant :

$$\forall t \in T, \quad z \mapsto F(z, t) \text{ est holomorphe.}$$

Alors la fonction

$$f(z) = \int_T F(z, t) d\mu \quad \text{est holomorphe et } f'(z) = \int_T \frac{\partial F}{\partial z}(z, t) d\mu.$$

5.3 Exemples célèbres

5.3.1 La fonction Gamma

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Comme $|e^{-t} t^{z-1}| = e^{-t} t^{\operatorname{Re}(z)-1} = e^{-t} t^{x-1}$ l'intégrale impropre converge bien pour $x > 0$. La fonction Γ est donc bien définie dans $H_0 = \{z \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$.

Pour montrer qu'elle est holomorphe, on applique le théorème précédent au compact $[1/n, n]$. Ainsi, $\Gamma_n(z) = \int_{1/n}^n e^{-t} t^{z-1} dt$ est une fonction holomorphe. La suite (Γ_n) converge uniformément sur les compacts de H_0 vers Γ ainsi la fonction Γ est bien holomorphe dans H_0 .

Pour x réel on montre en effectuant une intégration par parties que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour $x > 0$. Le théorème des zéros isolés implique alors que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ pour tout $z \in H_0$.

On pose alors $\Gamma^1(z) = \Gamma(z+1)/z$ pour $z \in H_1 = \{z \mid \operatorname{Re}(z) > -1\}$. C'est une fonction méromorphe possédant un pôle en 0. Elle coïncide avec Γ sur H_0 , c'est un prolongement analytique de Γ .

Finalement on définit un prolongement méromorphe $\tilde{\Gamma}$ de Γ sur $\mathbf{C} \setminus \{0, -1, \dots, -n, \dots\}$ qui est défini comme suit : si z vérifie $\operatorname{Re}(z) > -n$ alors,

$$\Gamma_n(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\dots(z+n-1)}, \quad \tilde{\Gamma}(z) = \Gamma(z).$$

5.3.2 La fonction Zeta

5.4 Produits infinis